

Dr. SWARNIM GHOSH

B.A. III- ECONOMICS

PAPER 3rd: QUANTITATIVE METHODS

E-CONTENT-6 (PDF FORMAT)-

UNIT-3

STATISTICS: MEASURES OF CENTRAL TENDENCY (MEAN,
MEDIAN AND MODE)

1

बीएचए तृतीय वर्ष

02-05-2020

अवधारणा
(UNIT - III)

(Measures of Central Tendency, Arithmetic mean, Median and Mode).

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप : समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक

केंद्रीय प्रवृत्ति के माप वह माप कहलाता है — जो दिए गये आँकड़ों (Data) का प्रतिनिधित्व करता है। इससे तात्पर्य औसत मान (Average Value) से होता है। सांख्यिकी में औसत (Average) का अर्थ ही केंद्रीय प्रवृत्ति की माप से लगाया जाता है। अतः किसी समूह/श्रेणी में एक ऐसी संख्या जो सम्पूर्ण समूहों की विशेषताओं का ज्ञान कराती है तथा जिसका उपयोग सम्पूर्ण श्रेणी के प्रतिनिधित्व के रूप में किया जाता है, केंद्रीय प्रवृत्ति की माप कहलाता है।

केंद्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप

(Various Measures of Central Tendency)

केंद्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में निम्नलिखित माध्य प्रमुख हैं :-

1. गणितीय माध्य (Mathematical Averages)

क. समान्तर माध्य अथवा अंकगणितीय माध्य अथवा माध्य (Arithmetic Average or Mean)

संकेताक्षर — \bar{X}

ख. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) — G.M.

ग. हार्मोनिक माध्य (Harmonic Mean) — H.M.

2. स्थिति सम्बन्धी माप (positional Averages):

क. माध्यिका (Median) — M

ख. बहुलक या भूयिष्ठक (Mode) — Mo या Z

02-05-2020

(*)

(2)

* केंद्रीय प्रवृत्ति के अंश तथा कार्य

शैक्षणिक विवरण

तलम
नीति-निर्धारण
सांख्यिकीय विश्लेषण
सीमा के लिए समूह



केंद्रीय प्रवृत्ति

या
समांतर माध्य
(श्रेणी के समस्त मूल्यों का प्रतिनिधित्व)

इस प्रकार, चर मूल्यों के एक समूह चाहे वह व्यक्तिगत (Individual), खंडित या अखंडित (Discrete) या अखंडित या सतत श्रेणी (Continuous) में किसी-चर मूल्यों के आसपास अथवा मूल्यों को केंद्रित होने की प्रवृत्ति को केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) कहा जाता है। इस बिंदु के आसपास अथवा बिंदुओं का जमाव होने की प्रवृत्ति पाई जाती है।

राय के अनुसार - 'केंद्रीय प्रवृत्ति का मान वह मान है, जो समस्त आँकड़ों का प्रेवर्तन प्रतिनिधित्व करता है।'

अब सबसे पहले सांख्यिकी के श्रेणियों को पहचानेंगे :-

(*) श्रेणी तीन प्रकार की होती हैं :-

व्यक्तिगत (Individual Series)	खंडित (Discrete Series)	अखंडित या सतत (Continuous Series)
x (चर)	x (चर) f (आवृत्ति)	वर्ग अंतराल आवृत्ति (f)
0	2	0-10 2
1	4	10-20 4
2	6	20-30 5
3	8	30-40 3
4		
जहाँ सिर्फ चर दिया हो (x) आवृत्ति (f) नहीं दी हो।	जहाँ, चर (x) तथा f (आवृत्ति) दोनों दी हुई हो।	हमारा सूचना कि सिर्फ सतत या अखंडित श्रेणी में ही वर्ग-अंतराल (Class Interval) दिया हुआ होता है।

(3)

I गणितीय माध्य (Mathematical Average)

(क) समान्तर माध्य या महत्त्व या माध्य या औसत या अंकगणितीय माध्य (MEAN)
संकेताक्षर - \bar{x} (सर्वाधिक लोकप्रिय माध्य है)

समान्तर माध्य वह माध्य है जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग को उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होती है। यह एक आदर्श माध्य है।
सेक्रिस्टो के शब्दों में - 'एक संख्या के पदों के मूल्यों के जोड़ में उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त संख्या माध्य कहलाती है।'

(*) समान्तर माध्य मापने की विधि

(क) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

(ग) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

(ख) लाघु विधि (Short-cut Method)

(घ) आकलन/योग विधि (Assumed Mean Method)

यहाँ हम तीनों श्रेणियों में माध्य निकालना सीखेंगे:-

(क) व्यक्तिगत श्रेणी : (प्रत्यक्ष विधि)

उदाहरण (1)	क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	प्राप्ति	25	28	32	26	38	35	24	23	20	40

क्र.सं.	प्राप्ति (x)
1	25
2	28
3	32
4	26
5	38
6	35
7	24
8	23
9	20
10	40
N=10, $\Sigma x = 291$	

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{291}{10} = 29.1 \text{ अंक}$$

उदाहरण (2) यदि किसी कक्षा में चार विधार्थियों द्वारा प्राप्त अंक क्रमशः 10, 16, 12 और 18 हैं तो उसका माध्य या औसत मान निकालिए।

SOL.2

x (चर)
10
16
12
18
$\Sigma x = 56$
N=4

$$\therefore \bar{x} = \frac{56}{4} = 14 \text{ (अंक)}$$

इस तरह व्यक्तिगत श्रेणी में, माध्य (\bar{x}) = सभी अंकों का योग अवलोकनों की संख्या

(4)

(2) खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना : प्रत्यक्ष विधि

$$\text{सूत्र: } \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$= \frac{\sum fx}{\sum f \text{ या } N}$$

उदाहरण (1) निम्न श्रेणी से समान्तर माध्य या माध्य ज्ञात कीजिए

पदों का क्रमांक : 6 7 8 9 10 11 12
आवृत्ति : 5 8 9 12 6 6 4

(Sol. 1)	पदों का क्रमांक (x)	आवृत्ति (f)	पद क्रमांक एवं आवृत्तियों का गुणनफल (fx)
	6	5	30
	7	8	56
	8	9	72
	9	12	108
	10	6	60
	11	6	66
	12	4	48
	N या $\sum f = 50$		$\sum fx = 440$

$$\text{समान्तर माध्य या माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum fx}{N} \text{ या } \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{440}{50}$$

$$= 8.8$$

उदाहरण (2) निम्न से समान्तर माध्य ज्ञात करें : (अव्यास हेतु)

प्राप्तिक : 5 10 15 20 25 30 35 40
द्वारों की संख्या : 10 14 18 20 16 12 6 4

[Ans: - 19.9]

5

ग) सन्न श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना : प्रत्यक्ष विधि

$$\begin{aligned} \text{सबसे पहले मध्य-विन्दु (m) निकालेंगे} &= \frac{L_1 + L_2}{2} \\ (\text{Mid-value}) &= \frac{\text{ऊपरी सीमा} + \text{निचली सीमा}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{फिर सूत्र } \bar{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} \text{ या } \frac{\sum fm}{N} \text{ लगाएंगे।}$$

उदाहरण: ①

लान (प्रति दुकान)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
दुकानों की संख्या	12	18	27	20	17	6

लान (प्रति दुकान) (वर्ग-अंतराल)	दुकानों की संख्या (f)	मध्यविन्दु (m)	f.m
0-10	12	5	60
10-20	18	15	270
20-30	27	25	675
30-40	20	35	700
40-50	17	45	765
50-60	6	55	330
$\sum f = N = 100$			$\sum fm = 2800$

प्रत्यक्ष विधि से
सूत्रानुसार,

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum fm}{\sum f \text{ या } N}$$

$$= \frac{2800}{100}$$

$$= 28$$

$$\text{₹}$$

उदाहरण (2) (अभाषित)

प्रकार	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
दलों की संख्या	10	12	20	18	10

(25.86 अं.)

(6)

3-5-2020

भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic mean)

$$\text{सूत्रानुसार, } \bar{x} = \frac{\sum xw}{\sum w}$$

उदाहरण :- निम्नलिखित संख्याओं से भारित समान्तर माध्य ज्ञात करें।

मार्क : A B C D E F

व्यय : 94 20 50 25 24 30

भार : 15 12 8 5 2 1

हल :-	मार्क	व्यय	भार	xw
	A	94	15	1410
	B	20	12	240
	C	50	8	400
	D	25	5	125
	E	24	2	48
	F	30	1	30
योग			$\sum w = 43$	$\sum xw = 2253$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum xw}{\sum w} \\ &= \frac{2253}{43} \\ &= 52.4 \text{ अंक}\end{aligned}$$

सामूहिक माध्य (Combined Mean)

K श्रेणियों का सामूहिक माध्य निम्न प्रकार निकाला जा सकता है :-

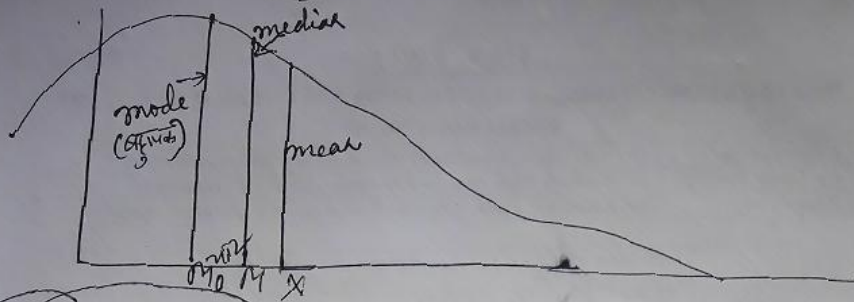
$$\bar{x}_{12} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + \dots + N_K \bar{x}_K}{N_1 + N_2 + \dots + N_K}$$

उदाहरण :- यदि $N_1 = 100$, $N_2 = 150$, $\bar{x}_1 = 2.50$, $\bar{x}_2 = 2.00$ तो सामूहिक माध्य क्या होगा? (रुप में)।

$$\begin{aligned}\text{हल :- } \bar{x}_{12} &= \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2} \\ &= \frac{100 \times 2.50 + 150 \times 2}{100 + 150} \\ &= \frac{550}{250} = 2.2 \text{ रुप}\end{aligned}$$

$N_1 = \text{पेयूरी 1 के श्रेणियों की संख्या}$
 $N_2 = \text{पेयूरी 2 के श्रेणियों की संख्या}$

7



माध्यिका (Median)

उदाहरण-1

माध्यिका
(Median)

$$= 10$$

जहाँसे दी गई संस्कृति-श्रेणी को बढ़ते क्रम या घटते क्रम में सजाना होता

उदाहरण - (2)

1 2 4 7 8 9 18 17
 \leftarrow \leftarrow

यहाँ की गर्ब श्रेणी में दो सूर्या महय में आ रही तो

$M = \frac{8+1}{2}$ वाँ पद सूज नहीं लगेगा।

$$\text{कालि} = \frac{4 \text{ वॉ पद} + 5 \text{ वॉ पद}}{2} \text{ वॉमान (लगेगा)}$$

$$= \frac{7+8}{2}$$

$$= \frac{15}{2}$$

$$= 7.5 \text{ g}$$

(8)

[05 - '05 - 2020]

(*) सूचक श्रेणी में माध्यिका (Median) निकालना :-

(सूचक आवृत्ति या वारंवारता निकालनी है फिर माध्यिका निकालनी है) :- cf

उदाहरण :- 1 ऊँचाई (इंच में) : 58 59 60 61 62 63 64 65 66
 छात्रों की संख्या : 15 20 32 35 33 22 20 10 8

ऊँचाई (इंच में) (x)	छात्रों की संख्या (f)	सूचक आवृत्ति या वारंवारता (cf)
58	15	15
59	20	35
60	32	67
61	35	102
62	33	135
63	22	157
64	20	177
65	10	187
66	8	195

माध्यिका (M) 98वाँ पद का आकार इसमें lie करता है (इसके सामने वाला) 2 ही माध्यिका होगा

$$M = \frac{N+1}{2} \text{वाँ पद का आकार}$$

$$= \frac{195+1}{2} \text{वाँ पद}$$

$$= \frac{196}{2} \text{वाँ पद}$$

$$= 98 \text{वाँ पद का आकार}$$

$$= 61 \text{ इंच}$$

N = 195

(*) सतत श्रेणी में माध्यिका (Median) निकालना :-

पहले $M = \frac{N}{2}$ वाँ पद खूब निकालेंगे, सूचक वारंवारता निकालने के बाद फिर उस का सामने वाला $M = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$ लगाएँगे।

उदाहरण :- 1 निम्नलिखित आवृत्ति वेंच से माध्यिका ज्ञात कीजिए।

अंक : 0-10 10-20 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70
 आवृत्ति : 7 10 15 20 25 12 10

अंक	आवृत्ति (f)	सूचक आवृत्ति (cf)
0-10	7	7
10-20	10	17
20-30	15	32
30-40	20	52
40-50	25	77
50-60	12	89
60-70	10	99

$M = \frac{N}{2}$ वाँ पद
 $= \frac{99}{2}$ वाँ पद
 $= 49.5$ वाँ पद (ओमि 49 के 52 में lie करता है)

\therefore माध्यिका का = 30-40

(9)

05-05-2020

$$\text{यहाँ, } \begin{cases} l_1 = 30 \\ cf = 32 \\ f = 20 \\ i = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{तो, } M(\text{मोडिफाईड}) &= l_1 + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i \\ &= 30 + \frac{49.5 - 32}{20} \times 10 \\ &= 30 + \frac{17.5}{20} \times 10 \\ &= 30 + \frac{175}{20} \\ &= 30 + 8.75 \\ &= 38.75 \text{ अंक } \end{aligned}$$

* बहुलक (MODE) :- संकेताक्षर : M_0 या Z

सारणीकृत में किसी विशेष आँकड़ों में जो मान सबसे अधिक बार आता है उसे बहुलक (mode) कहते हैं।

उदाहरण : व्यक्तिगत श्रेणी में आकषण

2, 4, 10, 1, 3, 4, 6, 4, 16

यहाँ, 1 की पुनरावृत्ति 2 बार, 2 की पुनरावृत्ति 1 बार, 3 की पुनरावृत्ति 1 बार, 4 की पुनरावृत्ति 3 बार, 6 की पुनरावृत्ति 2 बार, 10 की पुनरावृत्ति 1 बार हो रही है।

अतः सर्वाधिक पुनरावृत्ति 4 की 3 बार हो रही है।

अतः बहुलक (M_0 या Z) = 4 है

06-05-2020

माध्यमा (Median): ~~संकेत = M~~

(*) स्वच्छिन्न श्रेणी में वृत्तक का आकलन :-

ऊँचाई (सेमी में) : 150 160 170 180 190 200 210
 व्यक्तियों की संख्या : 2 4 8 10 6 5 3

→ ऊँचाई (सेमी में) (x) व्यक्तियों की संख्या (f)

150	2
160	4
170	8
180	10
190	6
200	5
210	3

यहाँ, $f_1 = 10$ (सर्वाधिक आवृत्ति)

$f_0 = 8$

$f_2 = 6$

तो f_1 के सामने वाला x ही वृत्तक होगा। अतः M_0 या $Z = 180$

(*) सतत श्रेणी में वृत्तक का आकलन :-

मजदूरी (रु० में) (Class-Interval) मजदूरियों की संख्या (f)

0-2	3
2-4	7
4-6	8 f_0
6-8	10 f_1
8-10	1 f_2
10-12	2
12-14	3

यहाँ, वृत्तक का $= 6-8$

$f_1 = 10$

$f_0 = 8$

$f_2 = 1, i = 2$

तो वृत्तक (M_0 या Z) =

$$M_0 = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 6 + \frac{10 - 8}{2 \times 10 - 8 - 1} \times 2$$

$$= 6 + \frac{4}{20 - 9}$$

$$= 6 + \frac{4}{11} = 6 + 0.37 = 6.37$$

DECEMBER
12
Thursday

श्रद्धा धर्म के राजे पृथिवी विद्या
प्रवेशिका नई। — श्री विवेकानन्द

07-05-2020

२६ अग्रहायण वृद्धश्राद्धवार १३२७
१५ मार्ग शुक्ल गुरुवार २०७६
Sunrise 06-11 A.M.
Sunset 04-48 P.M.

ग्रुपिंग (Mode)

(*) ग्रुपिंग आकलन का समूहीकरण विधि (GROUPING METHOD)

जहाँ श्रेणी में अनियमितता हो तब दो या दो से अधिक मूल्यों की आवृत्ति अधिक एवं आपस में समान हो। ऐसी दशा में ग्रुपिंग का आकलन समूहीकरण विधि द्वारा किया जाता है।

(उदाहरण :-) प्रथम चरण : समूहीकरण सारणी बनाना।

दूसरा चरण :- विश्लेषण सारणी (Analysis Table) बनाना।

समूहीकरण सारणी —

प्रथम खाना : f (दी हुई आवृत्ति)

दूसरा खाना : f_1 (2-2 का जोड़े का योग)

तीसरा खाना : f_2 (1 जोड़ कर 2-2 का जोड़े का योग)

चौथा खाना : f_3 (3-3 का जोड़े का योग)

पाँचवा खाना : f_4 (1 जोड़ कर 3-3 का जोड़ा)

फिर विश्लेषण सारणी द्वारा किन समूह को सबसे अधिक आवृत्ति मिल रही है, उसका पता लगाया जाता है।

(उदाहरण :-) x : 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
 f : 3 5 8 10 12 16 11 8 16 2 2

২৪ অগ্রহায়ণ বৃদ্ধবার ১৪২৬
১৪ মার্গ শুক্লা বুধবার ২০৩৬
Sunrise 06-10 A.M.
Sunset 04-48 P.M.

ঈশ্বর এক, তাঁর অনন্ত নাম ও অনন্ত ভাব।
যার যে নামে ও যেভাবে ডাকতে ভাল লাগে,
সে সেই নামে ও সেইভাবে ডাকলে দেখা
পাবে। —শ্রীরামকৃষ্ণ

8-05-2020

DECEMBER

11

Wednesday

হাট(SOLUTION):- প্রস্তুতি

প্রস্তুতি						বিশ্লেষণ					যোগ
x	f	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	x	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	
5	3	8				5					
6	5		13	16	23	6					
7	8					7					
8	10	18				8					1
9	12	28	22	38	39	9			✓		3
10	16		27			10	✓		✓	✓	4
11	11					11		✓			2
12	8	19	24	35		12					
13	16					13					
14	2	18				14					
15	2		4			15					

যদি, তাহলে যে ক্ষেত্রে $x=10$ এর আনুমানিক
করে কে ছাড়া যথেষ্ট অধিক 4 বার আসা হয়েছে অন্য
আনুমানিক ইচ্ছা কম হবে।

অতঃপর $(M_0 \text{ যা } z) = 10$ হওয়া।